Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année: 2010 - 2011
Gr1 : S1

Module d'Algèbre I
Série N° : 2

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) Soit $A, B \subseteq E$. Prouver les affirmations suivantes.

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

c) Si f est injective on a :

i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

ii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

2) Soit $C, D \subseteq F$. Prouver les affirmations suivantes.

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 2.

1) On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$. Montrer que dans les cas suivants f, g et h sont bijectives. A = B = C = D

a) $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

b) Deux des applications $hogof, gofoh$ et $fohog$ sont injectives et la troisième surjective.

c) Deux des applications $hogof, gofoh$ et $fohog$ sont surjectives et la troisième injective.

2) Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$. Existe-t-il g définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$?

3) Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ et $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $g(n) = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

a) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

b) Preciser $g \circ f$ et $f \circ g$ et conclure.

4) Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathfrak{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id_X$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$. Montrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$ et si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

4) Soient E un ensemble et f une application de E dans E. Montrer que:

a) Si $f^2 = f$ et f est injective ou surjective alors $f = Id_E$.

b) Si $f^3 = f$, alors f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 3. Soit $f : X \longrightarrow Y$. Montrer que:

1) $\forall B \subset Y \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

2) f est surjective $\Longleftrightarrow \forall B \subset Y \quad f(f^{-1}(B)) = B$.

3) f est injective $\Longleftrightarrow \forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = cos(t) + isin(t)$. Trouver un sous-ensemble X du domaine de définition de l'application f tel que la restriction de f à X est une bijection.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1) L'application f est-elle injective? surjective?

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3) Montrer que la restriction de f à $[-1, 1]$ est une bijection et expliciter l'application réciproque.

Card

Exercice 6. Pour A, B deux parties d'un ensemble fini E. Montrer : $Card(A \triangle B) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B)$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 9. Soit $n > 1$. Dans $\mathbb{Z}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x-y$ est divisible par n (On écrit $x \equiv y \quad mod(n)$ et se lit x et y sont équivalents modulo n).

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que la classe de x que l'on note $\overline{x}$ a un représentant unique x_0 tel que $1 \leq x_0 \leq n-1$.

3) Montrer qu'il y a n classes d'équivalence qu' on note $\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}$ (On les appelle les entiers modulo n et leur ensemble est noté $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{Z}_n$.

Exercice 10. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow (X = Y$ ou $\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \quad x \leq y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.